RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR

Juin 1998

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS d'ENTRÉE en PREMIÈRE ANNÉE

Spécialité : Mathématiques-Physique

Première Epreuve de Mathématiques Durée : 4 heures

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin porté à la présentation.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

PROBLÈME 1.

PREMIÈRE PARTIE

Soit $x \in]0,1[$ et soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[\times[0,\pi/2]$ par

$$g(t,\theta) = t^{x-1}e^{-te^{i\theta}}$$

1) Montrer que la fonction $G : \theta \mapsto \displaystyle\int_0^\infty g(t,\theta)\,dt$ est définie sur $[0,\pi/2]$.

2) Montrer que G est dérivable sur $[0,\pi/2[$ et vérifie $G'(\theta) = -ixG(\theta)$. En déduire que pour $\theta \in [0,\pi/2[$

$$G(\theta) = e^{-ix\theta}\Gamma(x), \quad \text{où} \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

3) Montrer que la fonction $\theta \mapsto \displaystyle\int_1^\infty g(t,\theta)\,dt$ est continue sur $[0,\pi/2]$.

4) En déduire que

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-it}\,dt = e^{-ix\pi/2}\Gamma(x)$$

et, pour $a > 0$,

$$\int_0^\infty t^{x-1} \sin(at)\, dt = \frac{\Gamma(x)}{a^x} \sin(x\pi/2)$$

DEUXIÈME PARTIE

1) Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$I(h) = \int_0^h \frac{\sin(u)}{u}\, du$$

est positive et admet un maximum en $h = \pi$.

2) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et uniformément sur tout intervalle $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, où $0 < \alpha < \pi$.

On pose

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin(nx)}{n} \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

3-a) Calculer $S'_m(x)$ et en déduire que pour tout $x \in [0, 2\pi[$

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \int_0^x \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t - \sin(t/2)}{2\sin(t/2)}\, dt \\ &= I\left((m+\frac{1}{2})x\right) + \int_0^x \left(\frac{1}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{t}\right) \sin\left(m+\frac{1}{2}\right) t\, dt - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

3-b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|S_m(x)| \leq I(\pi) + \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{t}\right) dt + \frac{\pi}{2}$$

4) Montrer que pour $x \in]0, 2\pi[$

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

TROISIÈME PARTIE

On pose $\displaystyle f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

---

1) Montrer que

$$f(x) = S(x) - \frac{1}{2}S(2x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

2) Montrer que pour $m\pi < x < (m+1)\pi$, on a $f(x) = (-1)^m \frac{\pi}{4}$.

Soit $0 < p < 1$ et $X > 0$.

3-a) Montrer que

$$\int_0^X x^{p-1} f(x)\, dx = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)} \int_0^X x^{p-1} \sin(2n+1)x\, dx$$

3-b) Montrer que

$$\lim_{X\to+\infty} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)} \int_X^\infty x^{p-1} \sin(2n+1)x\, dx = 0$$

3-c) Montrer que

$$\int_0^\infty x^{p-1} f(x)\, dx = \Gamma(p) \sin(p\pi/2) \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^{p+1}}$$

3-d) En déduire que

$$\frac{\pi^{p+1}}{4p} \left[1 + \sum_{m\geq 1} (-1)^m \left((m+1)^p - m^p\right)\right] = \Gamma(p) \left[1 - 2^{-p-1}\right] \sin(p\pi/2) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{p+1}}$$

PROBLÈME 2.

Notations :

$M(n,m)$ est l'espace des matrices réelles à n lignes et m colonnes.

$\mathrm{rg}(A)$ désigne le rang de la matrice A.

${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

$\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de la matrice carrée A.

I_p désigne la matrice unité de $M(p,p)$.

Si $n = p + q$ et $X \in M(n,n)$, on écrira $X = (X_{ij})$ avec

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

où $X_{11} \in M(p,p)$, $X_{12} \in M(p,q)$, $X_{21} \in M(q,p)$ et $X_{22} \in M(q,q)$.

PREMIÈRE PARTIE

1) Soit $A = (A_{ij})$ un élément de $M(n,n)$ tel que A_{11} est inversible dans $M(p,p)$.
a) Effectuer le produit

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

b) En déduire que le rang de A vaut p si et seulement si $A_{22} = A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

2) Soit $b : M(q,p) \times M(q,p) \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique définie par

$$b(X,Y) = \mathrm{tr}(X\,{}^tY)$$

Montrer qu'elle est définie positive.

DEUXIÈME PARTIE

Soit E un sous-espace de $M(n,n)$ et $p = \max\{\ \mathrm{rg}(A);\ A \in E\ \}$. On suppose que E vérifie l'hypothèse

$$\mathbf{H} : \quad \text{la matrice} \quad \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$$

1) Soit $A = (A_{ij}) \in E$, avec $A_{11} \in M(p,p)$.
a) Montrer qu'il existe une partie finie $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^*$ telle que

$$x \notin \mathcal{O} \Longrightarrow I_p + xA_{11} \text{ est inversible } \Longrightarrow (xA_{22}) = (xA_{21})(I_p + xA_{11})^{-1}(xA_{12})$$

b) En déduire que $A_{22} = 0$ et $A_{21}A_{12} = 0$.

2) Soit $A = (A_{ij})$ et $B = (B_{ij})$ deux éléments de E. Montrer que $A_{21}B_{12} + B_{21}A_{12} = 0$.

3) On considère les applications linéaires $f : E \longrightarrow M(p,p) \times M(q,p)$ et $\Pi : M(n,n) \longrightarrow M(q,p)$ définies par

$$f\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} = (A_{11}, {}^tA_{12}) \quad \text{et} \quad \Pi\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = X_{21}$$

a) Prouver que Π est injective sur le noyau $\ker f$ de f
b) Prouver que l'image $\mathrm{Im}f$ de f est incluse dans $M(p,p) \times (\Pi(\ker f))^{\perp}$. $((\Pi(\ker f))^{\perp}$ désigne l'orthogonal de $\Pi(\ker f)$ relativement à la forme bilinéaire b décrite dans la première partie).
c) Montrer que $\dim E \leq np$.

TROISIÈME PARTIE

On abandonne l'hypothèse **H**, montrer que l'on a toujours $\dim E \leq np$.